ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ, 7/6/2016, διδάσκων Α. Τόλιας

Θέμα 1.
Αν λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^k$ δείξτε ότι
(i) $\lambda(K) < +\infty$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^k$.
(ii) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : \ U$ ανοικτό, $A \subset U\}$ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A.
(iii) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : \ K$ συμπαγές, $K \subset A\}$ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A.

Θέμα 2.
Έστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θέτουμε $A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$.
(α) Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών περιέχεται σε ένα ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$ με μέτρο Lebesgue μικρότερο ή ίσο του ε.
(β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα G_δ σύνολο B με $\lambda(B) = 0$ και $\mathbb{Q} \subset B$.

Θέμα 3.
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f, g : X \to \mathbb{R}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις Δείξτε ότι:
(i) Το σύνολο $[f < g] = \{x \in X : \ f(x) < g(x)\}$ ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$.
(ii) Η $f + g$ είναι μετρήσιμη και η af είναι μετρήσιμη για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
(iii) Η f^2 είναι μετρήσιμη.
(iv) Η fg είναι μετρήσιμη.

Θέμα 4.
Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue και να αποδείξετε το ένα από τα δύο.

Θέμα 5.
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις, ώστε $\int f_n \, d\mu < +\infty$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$. Θέτουμε $g_n = \max\{f_i, \ 1 \leq i \leq n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:
(i) Η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση.
(ii) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\int g_n \, d\mu \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Να δείξετε ότι $\lim_n \int f_n \, d\mu = 0$.
[Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue.]

Θέμα 6.
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συνόλων της $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$f_n = \frac{1}{2^n \cdot (1 + \mu(A_n))} \chi_{A_n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Να δειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in X$.

Καλή Επιτυχία!